8. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x,y,z) = 2x - y + z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 1, x^2+(y+1)^2+z^2 \leq 1\}$
Definujme

$$g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1, g_2(x,y,z) := x^2+(y+1)^2+z^2-1.$$

Pak $M = [g_1 \leq 0, g_2 \leq 0]$.

Vyšetřeme pomocí věty 16 funkci f na $\operatorname{Int} M$. Spočtěme proto paricální derivace f a hledejme, kdy jsou na M nulové či neexistující.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 2 \\ f'_y(x,y,z) &= -1 \\ f'_z(x,y,z) &= 1 \end{aligned}$$

Nemáme tedy žádné body podezřelé z lokálních extrémů na $\operatorname{Int} M$. Vyšetřeme nyní chování f na $H(M)$. Z teorie ke 2. cvičení lze snadno odvodit, že $H(M) = ([g_1 = 0] \cap M) \cup ([g_2 = 0] \cap M)$. Zkoumejme tedy f na $[g_1 = 0] \cap M$ a na $[g_2 = 0] \cap M$ zvlášť.

Platí: $[g_1 = 0] \cap M = [g_1 = 0, g_2 \leq 0]$. Použijeme větu 24 na množinu $\{x \in G \colon g_1(x) = 0\}$, kde $G = [g_2 < 0]$, což je dle 2. cvičení otevřená množina. Pak vyšetříme ještě f na $[g_1 = 0 = g_2]$. Podobně bude třeba ještě vyřešit f na $[g_2 = 0, g_1 < 0]$.

$$\begin{aligned} (g_1)'_x(x,y,z) &= 2x \\ (g_1)'_y(x,y,z) &= 2y \\ (g_1)'_z(x,y,z) &= 2z \\ (g_2)'_x(x,y,z) &= 2x \\ (g_2)'_y(x,y,z) &= 2(y+1) \\ (g_2)'_z(x,y,z) &= 2z \end{aligned}$$

- $[g_1 = 0, g_2 < 0]$

Vyšetřeme podmínky *(I), (II)* z věty 24.

$$\nabla g_1 = 0 \iff 0 = 2x = 2y = 2z \iff [x,y,z] = [0,0,0]$$

Počátek ale nesplňuje podmínku, že $g_1 = 0$, tedy odsud žádný podezřelý bod nemáme.
Soustava $\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0$ společně s $g_1 = 0, g_2 < 0$ dává:

$$\begin{aligned} &2 + 2\lambda x = 0 \\ &-1 + 2\lambda y = 0 \\ &1 + 2\lambda z = 0 \\ &x^2+y^2+z^2 = 1 \\ &x^2+(y+1)^2+z^2 < 1 \end{aligned}$$

Z ní plyne, že $2\lambda = \frac{-2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{-1}{z}$ (zřejmě nelze, aby jakákoli z proměnných λ, x, y, z byla nulová). Pak platí

$$\begin{aligned}
&-2y = x \\
&-z = y \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
&x^2 + (y+1)^2 + z^2 < 1
\end{aligned}$$

Pak dosazením do poslední dvou rovnic dostaneme.

$$\begin{aligned}
&4y^2 + y^2 + y^2 = 1 \implies y^2 = \frac{1}{6} \implies y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\
&4y^2 + (y+1)^2 + y^2 < 1 \implies \frac{5}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{5+1+2\sqrt{6}+6}{6} = \frac{12+2\sqrt{6}}{6} < 1 \implies \text{ spor}
\end{aligned}$$

Odsud tedy bod podezřelý z extrému nedostáváme.

- $[g_2 = 0, g_1 < 0]$

$$\nabla g_2 = 0 \iff 0 = 2x = 2(y+1) = 2z \iff [x,y,z] = [0,-1,0]$$

Bod $[0,-1,0]$ ale není prvkem množiny $[g_2 = 0, g_1 < 0]$, tedy nejde o podezřelý bod.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0$ společně s $g_2 = 0, g_1 < 0$ dává:

$$\begin{aligned}
&2 + 2\lambda x = 0 \\
&-1 + 2\lambda(y+1) = 0 \\
&1 + 2\lambda z = 0 \\
&x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\
&x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1
\end{aligned}$$

Dostáváme (opět nedává smysl uvažovat λ, x, y či z nulová):

$$\begin{aligned}
&2\lambda = \frac{-2}{x} = \frac{1}{y+1} = \frac{-1}{z} \\
&x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\
&x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1
\end{aligned}$$

Tedy:

$$\begin{aligned}
&-2y - 2 = x \\
&z = -y - 1 \\
&x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\
&x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1
\end{aligned}$$

Dosazením prvních dvou rovnic do druhých dvou dostaneme:

$$\begin{aligned}
&(2+2y)^2 + y^2 + (y+1)^2 < 1 \\
&(2+2y)^2 + (y+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \implies 6y^2 + 12y + 6 = 1
\end{aligned}$$

Dostáváme, že $y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$, tedy $[x, y, z] = \left[\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$. Ten ovšem nevyhovuje podmínce $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Žádné podezřelé body odsud tedy nejsou.

• $[g_1 = 0 = g_2]$

Použijeme větu 25.

$$\nabla g_1 = k\nabla g_2 \iff 2y = 2(y+1)$$

Odsud tedy žádné podezřelé body nejsou.

Rovnost $\nabla f + \alpha\nabla g_1 + \beta\nabla g_2 = 0$ spolu s podmínkami $g_2 = 0 = g_1$ nám dává:

$$\begin{aligned}
&2 + 2\alpha x + 2\beta x = 0\\
&-1 + 2\alpha y + 2\beta(y+1) = 0\\
&1 + 2\alpha z + 2\beta z = 0\\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1\\
&x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1
\end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic plyne, že $y^2 = (y+1)^2$, tedy $0 = 2y + 1$, tedy $y = \frac{-1}{2}$. Soustava pak vypadá takto:

$$\begin{aligned}
&2 + 2\alpha x + 2\beta x = 0 \implies 2(\alpha+\beta)x = -2\\
&-1 - \alpha + \beta = 0\\
&1 + 2\alpha z + 2\beta z = 0 \implies 2(\alpha+\beta)z = -1\\
&x^2 + z^2 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Z první a třetí rovnice plyne, že $x \neq 0 \neq z$. Můžeme jimi tedy vydělit a dostaneme, že $2(\alpha+\beta) = \frac{-2}{x} = \frac{-1}{z}$, tedy plat: $2z = x$. Po dosazení tohoto faktu platí:

$$\begin{aligned}
&2z = x\\
&-1 - \alpha + \beta = 0\\
&5z^2 = \frac{3}{4} \implies z = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}
\end{aligned}$$

Máme tedy podezřelé body: $\left[\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

Celkově máme tyto podezřelé body: $\left[\pm\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{20}}\right]$.

Jelikož M je komp., plyne z věty 14, že stačí z podezřelých bodů vybrat kde je funkce f největší a nejmenší a dostaneme tak globální extrémy f na M.

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}},-\frac{1}{2},\sqrt{\frac{3}{20}}\right)=2\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{20}}=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\frac{1}{2},-\sqrt{\frac{3}{20}}\right)=-2\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{20}}=\frac{1-\sqrt{15}}{2}$$

Příklad 1 (b) $f(x,y)=(2x^2+3y^2)e^{-3x^2-y^2}$ a $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2; x\geq 0, y\geq 0\}$
• Int M: Zřejmě Int $M=[x>0,y>0]$. Zde použijeme větu 16.

$$f'_x(x,y)=4xe^{-3x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-3x^2-y^2}(-6x)=xe^{-3x^2-y^2}\left(4-12x^2-18y^2\right)$$
$$f'_y(x,y)=6ye^{-3x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-3x^2-y^2}(-2y)=ye^{-3x^2-y^2}\left(6-4x^2-6y^2\right)$$

$$xe^{-3x^2-y^2}\left(4-12x^2-18y^2\right)=0$$
$$ye^{-3x^2-y^2}\left(6-4x^2-6y^2\right)=0$$

Jelikož $e^x>0$ pro libovolné x dostáváme:

$$x\left(4-12x^2-18y^2\right)=0 \implies x=0 \ \vee\ x=\pm\sqrt{\frac{2-9y^2}{6}}$$
$$y\left(6-4x^2-6y^2\right)=0 \implies y=0 \ \vee\ y=\pm\sqrt{\frac{3-2x^2}{3}}$$

Není možné, aby $x=\pm\sqrt{\frac{2-9y^2}{6}}$ a zároveň $y=\pm\sqrt{\frac{3-2x^2}{3}}$. V kombinaci s požadavkem $[x,y]\in$ Int M vychází, že odsud nejsou žádné podezřelé body.

• $H(M)$: $H(M)=[x=0,y>0]\cup[x>0,y=0]\cup[0,0]$
•$[x=0,y>0]$
Zde zkoumáme chování funkce $g(y)=f(0,y)$ na intervalu $(0,\infty)$. Platí: $g(y)=3y^2e^{-y^2}$ a

$$g'(y)=6ye^{-y^2}-6y^3e^{-y^2}=e^{-y^2}6y\left(1-y^2\right).$$

Z podmínek $g'=0, y>0$ (16) dostáváme podezřelý bod: $[0,1]$
•$[x>0,y=0]$
Zde zkoumáme chování funkce $h(x)=f(x,0)=2x^2e^{-3x^2}$ na intervalu $(0,\infty)$. Platí:

$$h'(x)=4xe^{-3x^2}+2x^2e^{-3x^2}(-6x)=e^{-3x^2}\left(4x-12x^3\right)=4xe^{-3x^2}(1-3x^2).$$

Podmínky $h'=0, x>0$ dávají podezřelý bod: $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},0\right]$
Zbylý bod $[0,0]$ hranice zařadíme mezi podezřelé body.

Celkově máme tyto podezřelé body: , $[0,0], [0,1], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$.

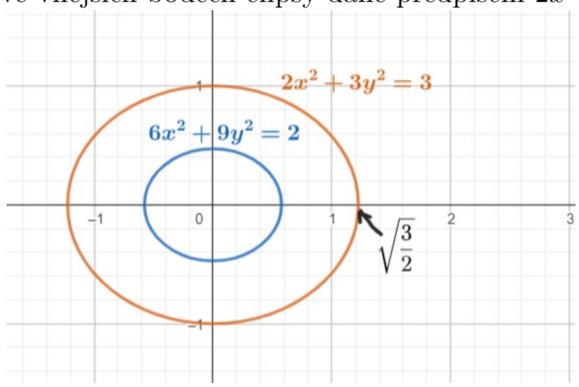
Vyšetřeme hodnoty f v těchto bodech.

$$
\begin{aligned}
&f(0,0) = 0\\
&f(0,1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}\\
&f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{2}{3}e^{-3\frac{1}{3}} = \frac{2}{3e}
\end{aligned}
$$

Dostáváme kandidáty na maximum: $\frac{3}{e}$ v bodě $[0,1]$ a na minimum: 0 v bodě $[0,0]$. Vyšetřeme, zda jde skutečně o maximum a minimum.

Zřejmě $f \geq 0$. Proto 0 je skutečně $\min_M f$. Ukažme ještě, že $\max_M f = \frac{3}{e}$.

Z f'_x, f'_y je vidno: v x-ovém směru funkce f klesá v M ve vnějších elipsy dané předpisem $6x^2 + 9y^2 = 2$ a v y-ovém směru f klesá M ve vnějších bodech elipsy dané předpisem $2x^2 + 3y^2 = 3$.



Zadefinujme $B := \left[0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \times [0,1]$. Pak na množině $M \setminus B$ má f obě parciální derivace záporné, tedy je v x-ovém i y-ovém směru klesající. Z toho plyne, že v libovolném bodě $M \setminus B$ má f menší hodnotu, než je $\sup_B f$. Zbývá tedy ukázat, že $\frac{3}{e} = \max_B f$.

Z doposud spočteného plyne, že v $\operatorname{Int} B$ nemá f žádný podezřelý bod. Z toho, jak jsme zkoumali f na osách plyne, že uvnitř levé a spodní hrany obdélníku B nejsou žádné podezřelé body. Uvnitř zbylých dvou hran je jediný bod, kde má f nulové parciální derivace - bod $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$. K podezřelým bodům přihodíme vrcholy obdélníku B. Máme tedy tyto podezřelé body: $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right], [0,0], [0,1], \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right], \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right]$. Jelikož je B kompaktní, tak stačí dle věty 14 jen vybrat nejmenší a největší hodnoty na podezřelých bodech.

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{2}{3e}\\
&f(0,0) = 0\\
&f(0,1) = \frac{3}{e}\\
&f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = \frac{6}{e^{\frac{11}{2}}}\\
&f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) = \frac{3}{e^{\frac{9}{2}}}
\end{aligned}
$$

Nejvyšší hodnotou je skutečně $\frac{3}{e}$, tedy $\max_B f = \frac{3}{e}$, což byla poslední věc, kterou jsme potřebovali ověřit.

Příklad 1 (c) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le 4, x+y+z \ge 0\}$

Množina M je zřejmě kompaktní (dle teorie 2. cvičení). Dle věty 14 stačí nalézt podezřelé body f na M a z nich pak vybrat ty, kde je f největší a nejmenší. Zkoumejme f na $\operatorname{Int} M$ a na $H(M)$.

Definujme:

$$g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-4, \ \ g_2(x,y,z) = x+y+z.$$

Platí $H(M) = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2] \cup [g_1 < 0, g_2 = 0]$.

• $\operatorname{Int} M = [x^2+y^2+z^2 < 4, x+y+z > 0]$: použijeme větu 16

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 2 \\ f'_y(x,y,z) &= 1 \\ f'_z(x,y,z) &= 3 \end{aligned}$$

Všechny parciální derivace existují v každém bodě $\operatorname{Int} M$ a nejsou nulové. Nemáme tedy žádné podezřelé body.

•$[g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme větu 24

$$\begin{aligned} (g_1)'_x(x,y,z) &= 2x \\ (g_1)'_y(x,y,z) &= 2y \\ (g_1)'_z(x,y,z) &= 2z \end{aligned}$$

Podmínka *(I)* je splněna pouze pro počátek, který však není ve zkoumané množině $[g_1 = 0, g_2 > 0]$. Odsud tedy není žádný podezřelý bod.

Podmínka *(II)*: $\nabla f + \lambda g_1 = 0, g_1 = 0, g_2 > 0$ dává:

$$\begin{aligned} &2 + 2\lambda x = 0 \implies 2\lambda x = -2 \\ &1 + 2\lambda y = 0 \implies 2\lambda y = -1 \\ &3 + 2\lambda z = 0 \implies 2\lambda z = -3 \\ &x+y+z > 0 \\ &x^2+y^2+z^2 = 4 \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic speciálně plyne, že λ, x, y, z jsou nenulová. Můžeme jimi tedy beztrestně dělit, čímž dostaneme: $-2\lambda = \frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{3}{z} \implies x = 2y, z = 3y$. Dosazením do poslední rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned} &(2y)^2 + y^2 + (3y)^2 = 4 \\ &4y^2 + y^2 + 9y^2 = 4 \\ &14y^2 = 4 \\ &y^2 = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Podmínka $x + y + z > 0$ nám dává jediný podezřelý bod: $\left[2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right]$

$\bullet[g_1 < 0, g_2 = 0]$: použijeme větu 24

$$\begin{aligned}(g_2)'_x(x,y,z) &= 1\\ (g_2)'_y(x,y,z) &= 1\\ (g_2)'_z(x,y,z) &= 1\end{aligned}$$

Podmínku *(I)* nelze splnit.
Podmínka *(II)*: $\nabla f + \lambda g_1 = 0, g_2 = 0, g_1 < 0$ dává:

$$\begin{aligned}&2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -2\\ &1 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1\\ &3 + \lambda = 0 \implies \lambda = -3\\ &x + y + z = 0\\ &x^2 + y^2 + z^2 < 4\end{aligned}$$

Soustava zřejmě nemá řešení, nedostáváme žádné podezřelé body.

$\bullet[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme větu 25
Podmínka *(I)*:

$$\nabla g_1 = k\nabla g_2 \iff k = 2x = 2y = 2z \iff \frac{k}{2} = x = y = z$$

Jelikož chceme, aby $[x, y, z] \in [g_1 = 0 = g_2]$, tak z této podmínky neplyne žádný bod (podmínka $x + y + z = 0$ dává, že jde o počátek, ten však nevyhovuje rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 4$).
Podmínka *(II)*: $\nabla f + \alpha g_1 + \beta g_2, g_1 = 0 = g_2$ dává:

$$\begin{aligned}&2 + 2\alpha x + \beta = 0\\ &1 + 2\alpha y + \beta = 0\\ &3 + 2\alpha z + \beta = 0\\ &x + y + z = 0\\ &x^2 + y^2 + z^2 = 4\end{aligned}$$

Z prvních tří rovností plyne: $-\beta = 2+2\alpha x = 1+2\alpha y = 3+2\alpha z$. Tedy $2\alpha(x-y) = -1$ a $2\alpha(y-z) = 2$. Opět speciálně platí, že $\alpha, x-y, x-z \neq 0$. Dosátáváme tedy, že $2\alpha = \frac{-1}{x-y} = \frac{2}{y-z} \implies z - y = 2x - 2y$. Soustavu jsme tímto zredukovali na:

$$\begin{aligned}&z = 2x - y\\ &x + y + z = 0 \implies x + y + 2x - y = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0\\ &x^2 + y^2 + z^2 = 4\end{aligned}$$

Dostáváme, že $x = 0, z = -y$. Dosazením do poslední rovnice dostáváme:

$$
\begin{aligned}
&0^2 + y^2 + (-y)^2 = 4 \\
&y^2 = 2
\end{aligned}
$$

Máme tedy podezřelé body: $\left[0, \pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right]$.
Celkově jsou podezřelé body: $\left[2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right], \left[0, \pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right]$

$$
\begin{aligned}
&f\left(2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right) = 4\sqrt{\frac{2}{7}} + \sqrt{\frac{2}{7}} + 9\sqrt{\frac{2}{7}} = 14\sqrt{\frac{2}{7}} \\
&f\left(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \\
&f\left(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Maximum: $14\sqrt{\frac{2}{7}}$ v $\left[2\sqrt{\frac{2}{z}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, 3\sqrt{\frac{2}{7}}\right]$
Minimum: $-2\sqrt{2}$ v $\left[0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Příklad 1 (d) $f(x, y, z) = y^2 + xz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + z \geq 0\}$
Všimněmě si, že M není kompaktní, neb není uzavřená. Zkoumejme proto f na kompaktu $\overline{M}$. Pokud se nám pak např. stane, že f nabývá maxima na $\overline{M} \setminus M$, tak půjde o supremum f na M, kterého se na m nenabývá. (půjde o supremum, jelikož f je spojitá a maxima by se nabývalo na hranici).
Zaveďme si:

$$
g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1. g_2(x, y, z) := x + z
$$

Opět budeme f zkoumat na $\operatorname{Int} \overline{M} = [g_1 < 0, g_2 > 0]$ a na $H(\overline{M}) = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2] \cup [g_1 < 0, g_2 = 0]$.

•$[g_1 < 0, g_2 > 0]$: použijeme větu 16

$$
\begin{aligned}
&f'_x(x, y, z) = z \\
&f'_y(x, y, z) = 2y \\
&f'_z(x, y, z) = x
\end{aligned}
$$

$\nabla f = 0 \iff x = y = z = 0$. Počátek však není ve zkouamné množině $[g_1 < 0, g_2 > 0]$, tedy žádný podezřelý bod.

•$[g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme větu 24

$$
\begin{aligned}
&(g_1)'_x(x, y, z) = 2x \\
&(g_1)'_y(x, y, z) = 2y \\
&(g_1)'_z(x, y, z) = 2z
\end{aligned}
$$

$\nabla g_1 = 0 \iff x = y = z = 0$, což nevyhovuje podmínce $g_1 = 0$.
$\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0, g_1 = 0, g_2 > 0$ dává:

$$\begin{aligned}
&z + 2\lambda x = 0 \implies -2\lambda x = z \\
&2y + 2\lambda y = 0 \implies -2\lambda y = 2y \implies y = 0 \vee \lambda = -1 \\
&x + 2\lambda z = 0 \implies -2\lambda z = x \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
&x + z > 0
\end{aligned}$$

Pokud by $\lambda = 0$, pak z prvních tří rovnic dostáváme: $x = y = z = 0$, což nesplňuje předposlední podmínku. Předpokládejme tedy, že $\lambda \neq 0$. Pak z první a třetí rovnosti dostáváme, že pokud $x = 0$, pak $z = 0$ a naopak. To ovšem nesplňuje poslední podmínku. BÚNO $x, z \neq 0$. Pak první a třetí rovnice dávají $-2\lambda = \frac{z}{x} = \frac{x}{z} \implies z^2 = x^2 \implies x = \pm z$. Z poslední podmínky pak plyne, že $x = z > 0$. Uvažme nyní dvě situace plynoucí z druhé rovnice. Předpokládajme nejdříve, že $y = 0$. Pak z podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dostáváme: $2z^2 = 1 \implies z = \frac{1}{\sqrt{2}} = x$. Pokud budeme předpokládat, že $\lambda = -1$, tak z první rovnice dostáváme, že $1 = -2\lambda$ (neb $x = z$), tedy $\lambda = -\frac{1}{2}$, což je spor s $\lambda = -1$.

Podezřelý bod: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

•$[g_1 < 0, g_2 = 0]$: použijeme větu 24

$$\begin{aligned}
(g_2)'_x (x, y, z) = 1 \\
(g_2)'_y (x, y, z) = 0 \\
(g_2)'_z (x, y, z) = 1
\end{aligned}$$

Nelze, aby $\nabla g_2 = 0$.
$\nabla f + \lambda \nabla g_2 = 0, g_1 < 0, g_2 = 0$ dává:

$$\begin{aligned}
&z + \lambda = 0 \implies -\lambda = z \\
&2y = 0 \implies y = 0 \\
&x + \lambda = 0 \implies -\lambda = x \\
&x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\
&x + z = 0
\end{aligned}$$

Máme tedy, že $x = z, y = 0$. Z rovnosti $x + z = 0$ pak plyne, že $x = z = y = 0$. To vyhovuje i předposlední podmínce.

Podezřelý bod: $[0, 0, 0]$.

•$[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme větu 25
$\nabla g_1 = k \nabla g_2 \iff k = 2x = 2z \wedge y = 0 \iff y = 0 \wedge x = z$
Společně s podmínkou, že $x + z = 0$ pak dostáváme, že $x = y = z = 0$, což ovšem nesplňuje $g_1 = 0$.
Rovnosti $\nabla f + \alpha g_1 + \beta g_2, g_1 = 0 = g_2$ dávají:

$$\begin{aligned}
&z + 2\alpha x + \beta = 0 \\
&2y + 2\alpha y = 0 \\
&x + 2\alpha z + \beta = 0 \\
&x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
&x + z = 0 \implies x = -z
\end{aligned}$$

Poslední podmínku dosadíme do předchozích.

$$
\begin{aligned}
&z - 2\alpha z + \beta = 0 \implies \beta = 2\alpha z - z\\
&2y + 2\alpha y = 0\\
&-z + 2\alpha z + \beta = 0 \implies \beta = z - 2\alpha z\\
&y^2 + 2z^2 = 1
\end{aligned}
$$

Z první a třetí rovnosti plyne: $2\alpha z - z = z - 2\alpha z \implies z - 2\alpha z = 0 \implies z(1-2\alpha) = 0$.

Pokud $z = 0$, pak $y = \pm 1$ dle poslední podmínky. Podezřelý bod: $[0, \pm 1, 0]$.

Pokud $\alpha = \frac{1}{2}$, pak druhá podmínka je: $3y = 0$, tedy $y = 0$. Z poslední rovnice pak dostáváme, že $z^2 = \frac{1}{2}$, tedy $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Podezřelý bod: $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Celkově máme podezřelé body: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $[0,0,0]$, $[0,\pm 1,0]$, $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\\
&f(0,0,0) = 0\\
&f(0,\pm 1,0) = 1\\
&f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 + \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vidíme, že $\max_{\overline{M}} f = 1$ a nabývá se ho v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $\min_{\overline{M}} f = -\frac{1}{2}$ a nabývá se ho v bodech $\left[\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ani jeden z uvedených bodů však nenní prvkem množiny M. Proto v rámci mnnožiny M jde jen o supremum a infimum f.

Příklad 2 (b) $f(x,y,z) = x^2 + 5z^2 + 2y^2$ a $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; (x-z)^2 + y^2 = 4, x - 7y - z + 2 \geq 0\}$

Množina M je omezená, neb $[z+2, 0, z] \in M$ pro každé $z \in \mathbb{R}$. Jelikož $\lim_{z\to\infty} f(z+2, 0, z^2) = \lim_{z\to\infty} (z+2)^2 + z^2 = \infty$, tak $\sup_M f = \infty$. Funkce f tedy na M svého suprema nenabývá.Hledáme tedy již jen $\inf_M f$. Stačí tedy z níže nalezených podezřelých bodů vybrat ten, ve kterém je f nejmenší a dokázat o něm, že jde o minimum nebo supremum.

Definujme: $g_1(x,y,z) := (x-z)^2 + y^2 - 4, g_2(x,y,z) := x - 7y - z + 2$. Pak $M = [g_1 = 0, g_2 \geq 0] = [g_1 = 0, g_2 > 0] \cup [g_1 = 0 = g_2]$.

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 10z)\\
&\nabla g_1(x,y,z) = (2(x-z), 2y, -2(x-z))\\
&\nabla g_2(x,y,z) = (1, -7, -1)
\end{aligned}
$$

$\bullet [g_1 = 0, g_2 > 0]$: použijeme větu 24.

$\nabla g_1 = 0 \iff x - z = y = 0$, avšak $[0,0,0] \notin [g_1 = 0, g_2 > 0]$. Odsud žádné podezřelé body nejsou.

$$
\begin{array}{l}
\nabla f + \lambda \nabla g_1 = 0 \\
g_1 = 0 \\
g_2 > 0 \\
\hline
2x + 2\lambda(x - z) = 0 \implies 2x = -2\lambda(x - z) \\
4y + 2\lambda y = 0 \implies y = 0 \vee \lambda = -\dfrac{1}{2} \\
10z - 2\lambda(x - z) = 0 \implies 10z = 2\lambda(x - z) \\
(x - z)^2 + y^2 = 4 \\
x - 7y - z + 2 > 0
\end{array}
$$

Pokud $\lambda = 0$, pak z prvních tří rovnic plyne, že $x = y = z = 0$, což nesplňuje předposlední rovnici. Předpokládajme, že $\lambda \neq 0$.

Pokud $x = z$, pak z první rovnosti plyne, že $x = 0 = z$. Ze čtvrté rovnosti pak plyne, že $y = \pm 2$, a aby byla splněna poslední rovnost, tak musí $y = -2$. Z toho dostáváme podezřelý bod: $[0, -2, 0]$

Pokud $x \neq z$, pak z první a třetí rovnosti máme, že $\lambda = \frac{-x}{x-z} = \frac{10z}{2(x-z)} \implies x = -5z$. Z druhé rovnosti máme dvě varianty: $y = 0 \vee \lambda = -\frac{1}{2}$. Pokud by $y = 0$m tak by ze čtvrté rovnosti plynulo, že $(-6z)^2 = 4 \implies z = \pm\frac{1}{3}$. Z podslední podmínky pak plyne bod: $\left[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right]$. Pokud by naopak $\lambda = -\frac{1}{2}$, tak bychom měli, že $\frac{-1}{2} = \frac{-x}{x-z} \implies x = -z$. V kombinaci s již spočítaným vztahem $x = -5z$, pak dostáváme, že $x = 0 = z$, což je spor s předpokladem, že $x \neq z$.

Máma tedy zatím tyto podezřelé body: $[0, -2, 0]$, $\left[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right]$.

$\bullet[g_1 = 0 = g_2]$: použijeme větu 25

$\nabla g_1 = k \cdot \nabla g_2$ dává soustavu:

$$
\begin{aligned}
&2(x - z) = k \\
&2y = -7k \\
&-2(x - z) = -k
\end{aligned}
$$

To dává bod $\left[\frac{k}{2} + z, \frac{-7}{2}k, z\right]$. Z podmínky $g_2 = 0$ máme, že $k = \frac{2}{25}$, a z $g_1 = 0$ máme: $k = \pm\sqrt{\frac{16}{50}}$. Tyto dvě podmínky jsou neslučitelné, tedy nemám žádný podezřelý bod.

$$
\begin{array}{l}
\nabla f = \alpha \nabla g_1 + \beta \nabla g_2 = 0 \\
g_1 = 0 \\
g_2 = 0 \\
\hline
2x + 2\alpha(x - z) + \beta = 0 \\
4y + 2\alpha y - 7\beta = 0 \\
10z - 2\alpha(x - z) - \beta = 0 \\
x - 7y - z = -2 \\
(x - z)^2 + y^2 = 4
\end{array}
$$

Z první a třetí rovnosti plyne $-\beta = 2x + 2\alpha(x-z) = -10z + 2\alpha(x-z) \implies x = -5z$. Dosazením tohoto do posledních dvou rovnic dostáváme, že $-6z = -2 + 7y, (-6z)^2 + y^2 = 4$. Dosazením první do druhé máme, že $4 = (7y-2)^2 + y^2 = 49y^2 - 28y + 4 + y^2 = 50y^2 - 14y + 4 \implies 50y^2 - 28y = 0 \implies y = 0 \vee y = \frac{14}{25}$. Dostáváme tedy podezřelé body: $\left[-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}\right]$.

Celkově podezřelými body jsou: $[0, -2, 0]$, $\left[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right], \left[-\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}\right]$.

$$
\begin{aligned}
f\left(\pm\frac{5}{3}, 0, \mp\frac{1}{3}\right) &= \frac{10}{3} \\
f(0,-2,0) &= 8 \\
f\left(\frac{8}{5}, \frac{14}{25}, \frac{-8}{25}\right) &= \frac{2312}{625}
\end{aligned}
$$

Kandidát na minimum: hodnota $\frac{10}{3}$ v bodech $\left[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right]$. Ukážeme, že jde o minimum.

Mn. $A := \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right] \times \{0\} \times \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right] \cap M$ je kompaktní podmnožina množiny M. Navíc zřejmě platí, že $A = \{[z+2, 0, z], [z-2, 0, z] : z \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]\}$. Dále platí, že $f(z+2, 0, z) = 6z^2 + 4z + 4$ a z vyšetření pomocí derivace plyne, že minimum $f(z+2, 0, z)$ na intervalu $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ je $\frac{10}{3}$. Podobně pro $f(z-2, 0, z)$. Máme tedy, že minimu f na A je $\frac{10}{3}$.

Z klasdnosti a zápornosti parciálních derivací plyne, že na zbytku množiny M je f větší, než $\frac{10}{3}$ (neb v příslušných částech $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right] \times \{0\} \times \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]\right)$ má f parciální derivace takové, jaké je má). Z toho tedy již plyne, že $\min_M f = \frac{10}{3}$ a nabývá se ho v bodech $\left[\frac{5}{3}, 0, \frac{-1}{3}\right]$.

Příklad 3 (a) Najděte nejkratší vzdálenost bodu $[1,1,1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

Vyjádřeme vzdálenost bodu $[1,1,1]$ od zadané roviny.

$\min\{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \colon 3x + y + z = 2\}$.

Hledáme tedy minimum funkce $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ na množině $M = \{x \in G \colon g(x) = 0\}$, kde $g(x,y,z) = 3x + y + z - 2, G = \mathbb{R}^3$.

Všimneme si, že odmocnina je minimální, pokud výraz v ní je co nejmenší. Z toho dostáváme, že k nalezní bodu, kde f nabývá minima stačí použít větu 24 na funkci $\tilde{f} = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ (slouží pouze ke snazšímu výpočtu).

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}'_x(x,y,z) &= 2x - 2 \\
\tilde{f}'_y(x,y,z) &= 2y - 2 \\
\tilde{f}'_z(x,y,z) &= 2z - 2 \\
g'_x(x,y,z) &= 3 \\
g'_y(x,y,z) &= 1 \\
g'_z(x,y,z) &= 1
\end{aligned}
$$

Soustava $\nabla\tilde{f} + \lambda\nabla g = 0$ jest následující soustavou.

$$
\begin{aligned}
2x - 2 + 3\lambda &= 0 \\
2y - 2 + \lambda &= 0 \\
2z - 2 + \lambda &= 0
\end{aligned}
$$

Jejím vyřešením dostáváme:

$$
\begin{aligned}
y &= z \\
2y - 2 &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Z rovnosti $3x + y + z = 2$ z definice M a toho, že $y = z$ dostáváme, že $2y - 2 = -3x$. To dosadíme do předchozí rovnice a dostáváme:

$$-3x = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \implies -9x = 2x - 2 \implies -1x = -2 \implies x = \frac{2}{11}$$

Z toho dostáváme, že $y = z = \frac{-3}{2}x + 1 = -\frac{3}{2}\frac{2}{11} + 1 = \frac{11-3}{11} = \frac{8}{11}$.
Zřejmě funkce $\tilde{f}$ nabývá v bodě $\left[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right]$ minima.
Minimální vzdálenost bodu $[1, 1, 1]$ od zadané roviny je tedy $f\left(\frac{2}{11}, \frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right) = \sqrt{\left(\frac{9}{11}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$

Příklad 3 (b) Dřevěná bedna tvaru kvádru bez víka má objem $V > 0$. Jaké mají být její rozměry, chceme-li minimalizovat množství dřeva použitého na její výrobu?

Označme hrany podstavy bedny jako a, b a výšku bedny jako c. Povrch bedny bez víka je pak $ab + 2bc + 2ac$. Naví má platit, že objem dané bedny je číslo V. Tedy musí platit, že $abc = V$. Přičemž, aby šlo skutečně o bednu, je potřeba, aby všechny rozměry byla kladná čísla. Tedy máme ještě podmínku: $a, b, c > 0$.

Matematicky řečeno jde o následující úlohu. Hledáme minimum funkce $f(a, b, c) = ab + 2bc + 2ac$ na množině $M = [abc = V, a, b, c > 0]$.

Použijeme větu 24. Definujme $g(a, b, c) := abc - V$. Pak $M = \{x \in G \colon g(x) = 0\}$, kde $G = [a, b, c > 0]$ (což je otevřená množina podle 2. cvičení).

$$\begin{aligned} \nabla f &= (b + 2c, a + 2c, 2b + 2a) \\ \nabla g &= (bc, ac, ab) \end{aligned}$$

Podmínka *(I)*: $\nabla g = 0 \iff 0 = bc = ac = ab$. To nemůže nastat za předpokladu, že $a, b, c > 0$.

Podmínka *(II)*: $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ za podmínky $[a, b, c] \in M$ dává (můžeme dělit, neb předpokládáme, že $a, b, c > 0$):

$$\begin{aligned} & b + 2c + \lambda bc = 0 \implies -\lambda = \frac{b + 2c}{bc} \\ & a + 2c + \lambda ac = 0 \implies -\lambda = \frac{a + 2c}{ac} \\ & 2a + 2b + \lambda ab = 0 \implies -\lambda = \frac{2a + 2b}{ab} \\ & abc = V \\ & a, b, c > 0 \\ \hline & abc + 2ac^2 = abc + 2bc^2 \implies a = b \\ & 2a^2c + 2abc = a^2b + 2abc \implies b = 2c \\ & abc = V \\ & ab, b, c > 0 \\ \hline & a = b = 2c \\ & 2c \cdot 2c \cdot c = V \implies 4c^3 = V \implies c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy podezřelý bod: $a = b = \sqrt[3]{2V}, c = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Lze ukázat, že jde o minimum f na$M$.

Příklad 3 (c) Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co možná největší.

Označíme-li hrany kvádru jako a, b, c, pak chceme, aby $4a + 4b + 4c = 96$ a abc bylo co největší.

Jde tedy o úlohu: $f(a, b, c) = abc, M = [4(a + b + c) = 96, a, b, c > 0] = [a + b + c = 24, a, b, c > 0]$ a hledáme $\max_M f$.

Použijeme větu 24. Definujme

$$g(a, b, c) := a + b + c - 24.$$

$$\begin{aligned}
f'_a(a, b, c) &= bc \\
f'_b(a, b, c) &= ac \\
f'_c(a, b, c) &= ab \\
g'_a(a, b, c) &= 1 \\
g'_b(a, b, c) &= 1 \\
g'_c(a, b, c) &= 1
\end{aligned}$$

Platí, že $\nabla g \neq 0$. Zbývá tedy vyšetřit druhou podmínku.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ společně s $[a, b, c] \in M$ dává:

$$\begin{aligned}
bc + \lambda &= 0 \\
ac + \lambda &= 0 \\
ab + \lambda &= 0 \\
a + b + c &= 24 \\
a, b, c &> 0
\end{aligned}$$

Z prvních tří rovnict plyne: $-\lambda = bc = ac = ab$, z čehož plyne: $a = b = c$ (neb $a, b, c \neq 0$).

Dosazením do podmínky $a + b + c = 24$ dostáváme: $3a = 24 \implies a = b = c = 8$.

Lze ukázat, že v tomto bodě má f skutečně maximum vzhledem k M.

Příklad 3 (d) Rozložte kladné číslo na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Označme ono kladné číslo jako A. Chceme, aby $A = a + b + c + d$ a $a, b, c, d > 0$. Zároveň chceme, aby a, b, c, d byla volena tak, že $abcd$ bude co největší.

Definujme:

$$f(a, b, c, d) = abcd, M = [A = a + b + c + d, a, b, c, d > 0], g(a, b, c, d) = a + b + c + d - A.$$

Hledáme $\max_M f$, k čemuž použijeme větu 24.

$$\begin{aligned}
f'_a(a, b, c, d) &= bcd \\
f'_b(a, b, c, d) &= acd \\
f'_c(a, b, c, d) &= abd \\
f'_d(a, b, c, d) &= abc \\
g'_a(a, b, c, d) &= 1 \\
g'_b(a, b, c, d) &= 1 \\
g'_c(a, b, c, d) &= 1 \\
g'_d(a, b, c, d) &= 1
\end{aligned}$$

Platí: $\nabla g \neq 0$. Ověřme tedy druhou podmínku.

Rovnost $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ společně s $[a, b, c, d] \in M$ dává:

$$\begin{aligned}
&bcd + \lambda = 0 \\
&acd + \lambda = 0 \\
&abd + \lambda = 0 \\
&abc + \lambda = 0 \\
&a + b + c + d = A \\
&a, b, c, d > 0
\end{aligned}$$

Speciálně platí: $-\lambda = bcd = acd = abd = abc$. Jelikož předpokládáme, že $a, b, c, d \neq$, můžeme jimi dělit, čímž dostaneme: $a = b = c = d$. Z podmínky $A = a+b+c+d$ pak dostáváme, že $a = b = c = d = \frac{A}{4}$.

Příklad 3 (e) Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Protože se nachází u řeky, stačí jej oplotit ze tří stran. Jaké bude zadání úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů?

Označíme-li stranu u řeky jako a a druhou stranu obdélníku jako b, lze zadání převést na toto: $a, b > 0, a + 2b = 100$ a chceme, aby ab bylo co největší. Zadáné úlohy pomocí Lagrangeových multiplikátorů je tedy následující: $f(a, b) = ab, g(a, b) = a + 2b - 100, G = [a, b > 0], M = \{x \in G \colon g(x) = 0\}$ a hledáme $\max_M f$.